

第6章 非圧縮, 渦なし, 完全流体

6.1 速度ポテンシャル, 流線関数

6.1.1 速度ベクトルの分解

まずは, 速度場の表現方法を考えておく.

- 速度ポテンシャル ϕ [$\text{m}^2 \text{sec}^{-1}$], ベクトルポテンシャル Ψ [$\text{m}^2 \text{sec}^{-1}$] を使って \boldsymbol{v} と次のように分解する.

$$\boldsymbol{v} = \text{grad}\phi + \text{rot}\Psi$$

このとき

$$\begin{aligned} \text{div}\boldsymbol{v} &= \nabla^2\phi : \text{発散成分}, \\ \text{rot}\boldsymbol{v} &= \text{rotrot}\Psi : \text{回転成分} \end{aligned}$$

- 注意: ϕ と Ψ の分解は一意ではない.

$$\boldsymbol{v} = \text{grad}\phi' + \text{rot}\Psi'$$

という別の分解も可能

$$\begin{aligned} \phi &= \phi' + \tilde{\phi}, \\ \Psi &= \Psi' + \tilde{\Psi} \end{aligned}$$

とすると, $\tilde{\phi}, \tilde{\Psi}$ は

$$0 = \text{grad}\tilde{\phi} + \text{rot}\tilde{\Psi}$$

をみたせば, 零でない場の量となることができる. また, このことは

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2\tilde{\phi}, \\ 0 &= \text{rotrot}\tilde{\Psi} \end{aligned}$$

であることに注意. このような不確定性をゲージ自由度という.

- 2次元直線直交座標系 (x, y)
この場合, ベクトルポテンシャルとして

$$\mathbf{\Psi} = (0, 0, \Psi) = (0, 0, -\psi)$$

を考えれば良い.

この ψ とポテンシャル ϕ を使った速度の表現は以下のようになる.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2},$$

$$\{\text{rot} \mathbf{v}\}_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

- 2次元極座標 (r, θ)

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

ちなみに

$$\text{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\{\text{rot} \mathbf{v}\}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

6.1.2 流線関数

- 2次元の場合の Ψ あるいは ψ を特に流線関数という.
- 2次元非発散流れ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

の場合, 流れ場は流線関数 ψ だけで与えられる.

$$\mathbf{v} = \text{rot}(-\mathbf{k}\psi) = \mathbf{k} \times \text{grad} \psi$$

\mathbf{k} は着目する 2 次元平面と直交する単位ベクトルである。
直線直交座標系では

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

極座標系では

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

で, 流線関数 ψ による表現は

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

である.

例題

流線関数として

$$\psi = \sin(kx) \cos(ly)$$

を考えると速度場は

$$(u, v) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) = (l \sin(kx) \sin(ly), k \cos(kx) \cos(ly))$$

となる (図 6.1)

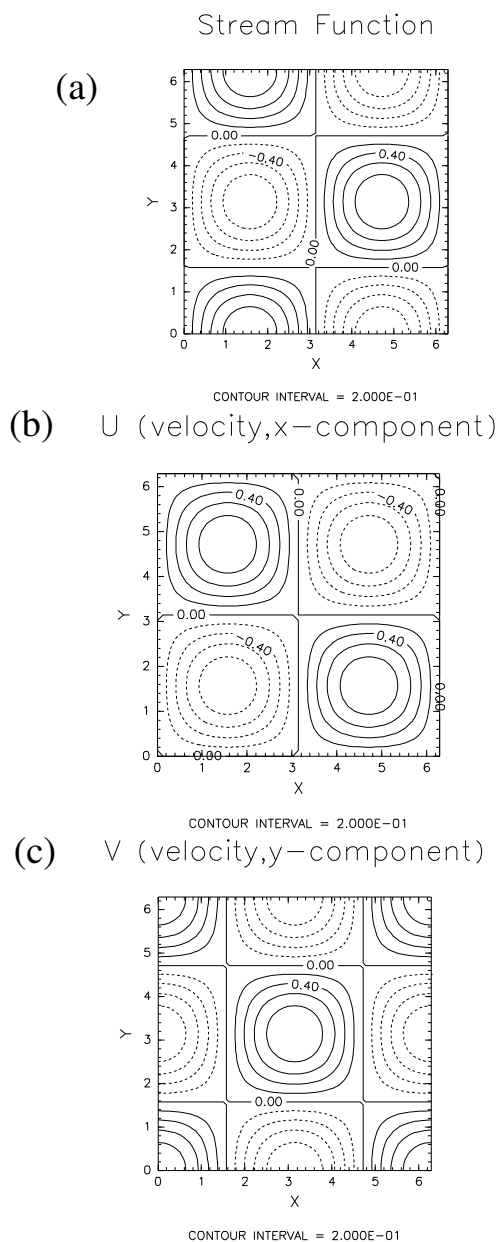


図 6.1: 2次元流の例. 流線関数として $\psi = \sin(kx)\cos(l y)$ を与える場合. $k = 1, l = 1$ の場合. (a) 流線関数, (b) x 方向の速度, (c) y 方向の速度.

- 流量

$$M = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

を面 S を通過する流量という. 面の向きに流れが出て行くときに流量正である.

2次元の場合:

$$M = \int_l \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl$$

を線分 l を通過する流量という. \mathbf{n} は線素 dl に対する単位法線ベクトルである (図 6.2). \mathbf{n} の方向に流れが出て行くときに流量正である.

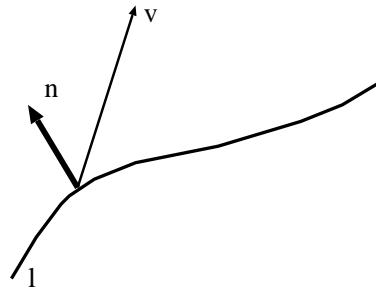


図 6.2: 2次元における流量の考え方

2次元非発散の場合:

$$\begin{aligned} M &= \int_l \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl = \int_l \mathbf{k} \times \text{grad}\psi \cdot \mathbf{n} dl = \int_l \mathbf{n} \times \mathbf{k} \cdot \text{grad}\psi dl = - \int_l \text{grad}\psi \cdot dl \\ &= -\psi|_{l_1}^{l_2} \end{aligned}$$

となる¹. ここで, l_1 は線分 l の始点, l_2 は線分 l の終点である. よって, 流線関数は流量を表すものである.

6.2 ポテンシャル流

渦無しの流れ

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{v} = 0$$

の場合, 速度ポテンシャル ϕ のみで

$$\mathbf{v} = \text{grad}\phi$$

で書ける. なので, 渦無しの流れをポテンシャル流とも言う.

¹ベクトル解析の公式を使った:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

6.2.1 渦無し流れ (ポテンシャル流) の循環

渦無しの流れの循環を考える.

単連結領域の場合を考える. 単連結とは, 領域内の任意の閉曲線が全て 1 点に縮められるような領域.

単連結領域なら任意の閉曲線 C について

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となる.

$N + 1$ 重連結領域 (N 個の切れ目を入れると単連結領域になる) なら

$$\Gamma = p_1\Gamma_1 + \dots + p_N\Gamma_N$$

ここで, Γ_i は, $N + 1$ 重連結領域に入れた「切れ目」 Σ_i を 1 回だけ横切る閉曲線についての循環. また p_i は, Σ_i を正の向きに横切る回数であり, $p_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ である. Γ は 0 になるとは限らない.

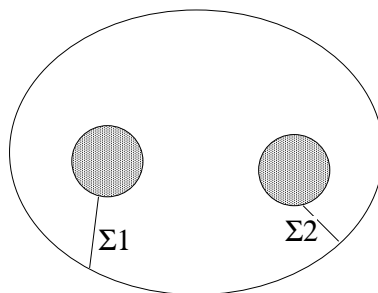


図 6.3: 3 重連結領域.

Γ と速度ポテンシャル ϕ の関係は

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \text{grad}\phi \cdot d\mathbf{l} = \oint_C d\phi$$

となるので, $N + 1$ 重連結領域なら ϕ は不定性を持つことになる. つまり, ϕ は多価でありうる.

例

半径 a の円領域をくり抜いた流れ場

$$\mathbf{v} = (u, v) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

ただし $x^2 + y^2 > a^2$

を考える (図 6.4). この流れは

$$\text{rot}\mathbf{v} = 0$$

だが, 円領域を含む閉じた経路上で定義した循環は

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint d\theta = 2\pi$$

ちなみに, この流れのポテンシャル表現は

$$\phi = \theta$$

である.

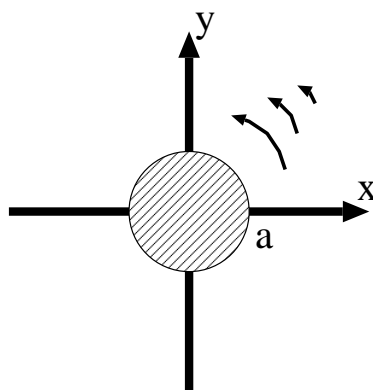


図 6.4: 円領域のまわりの流れ.

6.2.2 ポテンシャル流の時間発展方程式

運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} \Phi + \mathbf{F}$$

において $\boldsymbol{\omega} = 0$ なので

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} \Phi + \mathbf{F}$$

順圧 $\rho = \rho(p)$ の場合,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 = -\text{grad} \int \frac{dp}{\rho} - \text{grad} \Phi + \mathbf{F}$$

となる. ここで,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \int^p \frac{dp}{\rho(p)}$$

を使った. \mathbf{F} がナビエ・ストークス型の粘性なら

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \nu \nabla^2 \mathbf{v} \\ &= \nu \text{grad}(\text{div} \mathbf{v}) - \nu \text{rot}(\text{rot} \mathbf{v}) = \nu \text{grad}(\text{div} \mathbf{v})\end{aligned}$$

したがって, ν が定数の場合

$$\frac{\partial \text{grad} \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 = -\text{grad} \int \frac{dp}{\rho} - \text{grad} \Phi + \text{grad}(\nu \text{div} \mathbf{v})$$

すなわち

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi - \nu \nabla^2 \phi = f(t)$$

$f(t)$ は時間のみに依存する任意関数. これと連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \text{grad} \phi) = 0$$

とで系を記述する完全な時間発展方程式となる.

渦無しで非圧縮 $\text{div} \mathbf{v} = 0$, かつ $\rho = \rho_0$ の場合

$\text{div} \mathbf{v} = 0$ 及び $\rho = \rho_0$ なので, 連続の式は

$$\nabla^2 \phi = 0$$

となる. したがって, Laplace 方程式を解けば良い.

よって, 流れのポテンシャルは調和関数であり, 流れ場は境界条件から全て決まる.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho_0} + \Phi = f(t)$$

は圧力場 p を与える式になる. 一般に非圧縮流体では圧力場は, 流れ場から与えられる. 運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{v}|^2 = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \text{grad} \Phi + \mathbf{F}$$

の発散をとると

$$\text{div} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad} p \right) = -\text{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \nabla^2 |\mathbf{v}|^2 - \nabla^2 \Phi + \text{div} \mathbf{F}$$

注意

渦無し ($\text{rot} \mathbf{v} = 0$), 非圧縮 ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) な流れではナビエ・ストークス型の粘性は働かないことに注意.

6.3 渦無し・縮まない流体における簡単な 3 次元流れ

渦無し ($\text{rot}\mathbf{v} = 0$, $\mathbf{v} = \text{grad}\phi$) で, 非圧縮 ($\text{div}\mathbf{v} = 0$), $\rho = \rho_0$ となる流体の場合, 連続の式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \text{grad}\phi) &= 0, \\ \rho \text{div}(\text{grad}\phi) &= 0\end{aligned}$$

となる. これより, 速度場は

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{6.1}$$

だけで決まる.

以下, 簡単な解を紹介する.

6.3.1 一様な流れ (uniform flow)

$$\phi = ax + by + cz + d \tag{6.2}$$

速度場は以下で求められる.

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = (a, b, c)$$

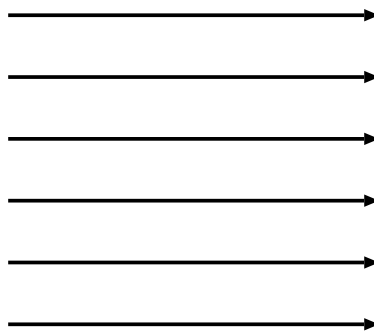


図 6.5: 一様流

6.3.2 湧き出し, 吸い込み

極座標で考える. Laplace 方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

この Laplace 方程式の解の 1 つを求めると.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) &= 0, \\ r^2 \frac{d\phi}{dr} &= m, \\ \frac{d\phi}{dr} &= \frac{m}{r^2}, \\ \phi &= -\frac{m}{r}\end{aligned}$$

となる. ここで積分定数は落した.

m [$\text{m}^3 \text{sec}^{-1}$] は 1 秒間に湧き出す/沈み込む流体の体積をあらわす. $m > 0$ は湧き出しの流れ, $m < 0$ 吸い込みの流れをあらわしている.

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{r^2}$$

わきだし (もしくは, 吸い込み) の総量は, 半径 r の円の周に沿って速度の動径成分を積分すれば良い. 結果は以下のとおり.

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_S v_r dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{m}{r^2} r^2 \cos \theta d\theta d\phi = 4\pi m$$

$4\pi m$ をわきだし (もしくは, 吸い込み) の強さという.

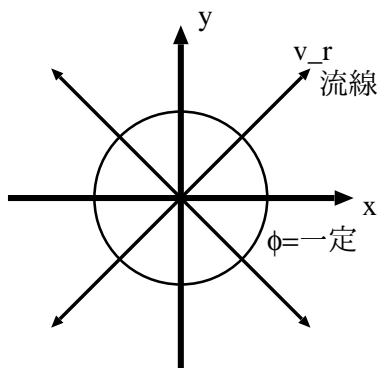


図 6.6: 湧き出し, 吸い込み

6.3.3 一様流れ場中の湧き出し ($m > 0$)

$$\phi = Ux - \frac{m}{r} = Ur \cos \theta - \frac{m}{r} \quad (6.3)$$

ただし x 軸方向が $\theta = 0$.

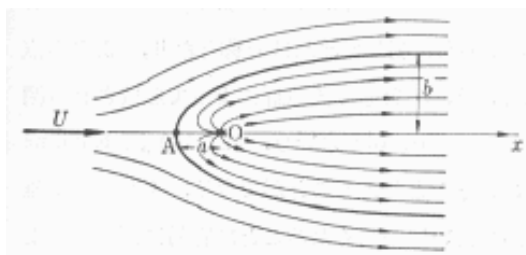


図 6.7: 一様流中の湧き出し.

- 淀み点 $|\mathbf{v}| = 0$

$$v_r = U \cos \theta + \frac{m}{r^2} = 0 \rightarrow r = \sqrt{\frac{m}{U}}, \theta = \pi$$

つまり, x 軸のとある一点では湧き出しによる速度と一様流がちょうど打ち消しあう. よどみ点は図中では A で示される点である.

- 遠方での広がり

湧き出した流体は無限の下流で半径 b の円筒状の領域を占める. そこでは流速 U になると考える. 流量の保存から

$$Q = 4\pi m = \pi b^2 U,$$

$$b = 2\sqrt{\frac{m}{U}}$$

6.3.4 二重湧き出し

$$\phi = -\frac{m}{r} + \frac{m}{r_1}$$

これは, 2 点 Q, Q_1 に同じ強さの湧き出しと吸い込みが存在する場合の流れ. $r_1 \rightarrow r$ の極限を考える (湧き出しと吸い込みが無限に近接している場合)

$$\phi = -\frac{m}{r} + \frac{m}{r + \delta r} = -\frac{m}{r} + \frac{m}{r + \delta r} = -\frac{m\delta r}{r^2} = -\frac{m\delta x \cos \theta}{r^2}$$

$$\rightarrow -\frac{\mu \cos \theta}{r^2}$$

ただし $\mu \equiv \lim m\delta x$ が一定となるような極限をとった. 一般の方向 $\mathbf{e} = (l, m, n)$ の場合は

$$\phi = \mathbf{e} \cdot \text{grad} \frac{\mu}{r}$$

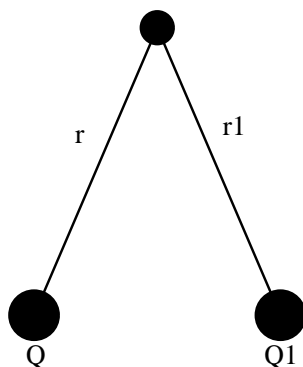


図 6.8: 二重湧き出しを考える設定.

この流れを, Q 点に置かれた軸方向 e , 強さ μ の二重湧き出し (doublet) による流れという. 原点に x 軸方向の二重湧き出しがある時の流れは

$$\phi = -\mu \frac{\cos \theta}{r^2} = -\mu \frac{x}{r^3} \tag{6.4}$$

となる.

6.3.5 ランキンの卵型 ($m > 0$)

$$\phi = Ux - \frac{m}{r} + \frac{m}{r_1} \tag{6.5}$$

これは, 上記の流れで O から湧き出した流体を x 軸上の別の点 O_1 で吸い込むときにできる流れ. r, r_1 はそれぞれ O, O_1 からの距離である. よどみ点は A, B の 2 つ. A, B を通る流線群によって形成される閉曲面をランキンの卵型 (Rankine's ovoid) という.

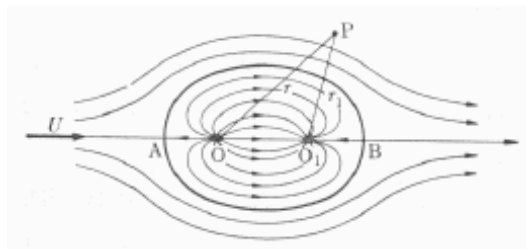


図 6.9: ランキンの卵型.

6.4 二次元渦無し・非圧縮流体

6.4.1 複素ポテンシャルによる流れ場の表現

- 二次元の渦無し ($\text{rot} \mathbf{v} = 0$) で, 非圧縮 ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) な流体は, 速度ポテンシャルと流線関数を用いて

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (6.6)$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.7)$$

と書ける. したがって, ϕ, ψ で定義される $z = x + iy$ の複素関数

$$f = \phi - i\psi$$

はコーシーリーマンの定理によって解析関数である. f [$(\text{m}^2 \text{sec}^{-1}, \text{m}^2 \text{sec}^{-1})$] を流れの複素ポテンシャルと言う.²

- 流れ場は複素ポテンシャル f を用いて

$$v_x - iv_y = \frac{df}{dz} = qe^{-i\theta}$$

と表現される.

$$v_x = q \cos \theta,$$

$$v_y = q \sin \theta$$

- 循環 Γ と流量 Q は

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint \text{grad} \phi \cdot d\mathbf{l} = \oint d\phi,$$

$$Q = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{k} \times \text{grad} \psi) \cdot d(\mathbf{l} \times \mathbf{k})$$

$$= \oint \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \text{grad} \psi) \cdot d\mathbf{l} = - \oint \text{grad} \psi \cdot d\mathbf{l} = - \oint d\psi$$

²複素関数の復習. 解析関数 $f = u + iv$ の $z = x + iy$ 微分は

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

となる.

ここで, \mathbf{k} は z 軸方向の単位ベクトルである.³ よって

$$\oint \frac{df}{dz} = \oint df = \oint d\phi - i \oint d\psi = \Gamma + iQ$$

単連結領域なら f が解析関数であることにより

$$\oint df = \Gamma + iQ = 0$$

- 複素関数の性質を使うと, 一つの流れ場 (複素関数 f) から他の流れ場を生成できる. 等角写像 (z 平面で図形を相似な図形に移す解析関数による写像) によって, さまざまな形状のまわりの流れが円柱のまわりの流れに射影される. 円柱のまわりの流れを求めておけば, 他の様々な流れを求めることができる.

例えば, ジューコフスキーの変換は z 面の円を平板に写す写像である.

6.4.2 2次元渦無し・非圧縮流体の簡単な例

- 一様な流れ U (U は実定数)

$$f = Uz = Ux + iUy \quad (6.8)$$

よって,

$$\begin{aligned} \phi &= Ux, \\ \psi &= -Uy. \end{aligned}$$

- 湧き出し, 吸い込み

$$f = m \ln z = m \ln(re^{i\theta}) = m(\ln r + i\theta) \quad (6.9)$$

よって

$$\begin{aligned} \phi &= m \ln r, \\ \psi &= -m\theta \end{aligned}$$

これから, 流線 $\psi = \text{const}$ は $\theta = \text{const}$. これは原点から出る放射線状の直線群.

³被積分関数は

$$(\mathbf{k} \times \text{grad}\psi) \cdot d(\mathbf{l} \times \mathbf{k}) = (\mathbf{k} \times \text{grad}\psi) \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{k}) = d\mathbf{l} \cdot \{\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \text{grad}\psi)\}$$

ここで, ベクトル解析の公式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A}$$

を使った.

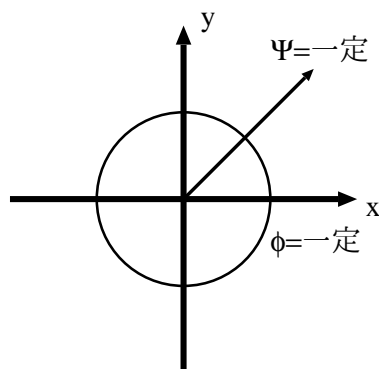


図 6.10: 湧き出し, 吸い込み

流れの向きを知るには, 動径方向の速度成分 v_r を求めれば良い.

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{m}{r}$$

これから, $m > 0$ ならば, $v_r > 0$. よって, 湧き出しの流れ. 流量は

$$Q = - \oint d\psi = 2\pi m$$

循環は 0:

$$\Gamma = \oint d\phi = 0$$

- 二重湧き出し

$$f = m \ln(z - a) - m \ln(z + a) = m \ln \frac{z - a}{z + a} \quad (6.10)$$

これは湧き出しと吸い込みが存在する場合の流れである.

この $a \rightarrow 0$ の極限をとると

$$f = -\frac{\mu}{z}$$

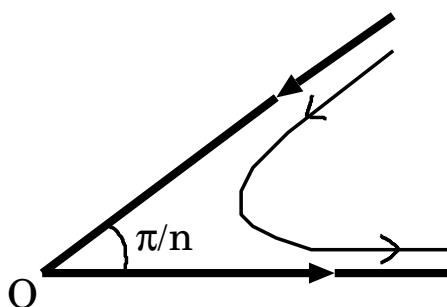
ただし $\mu \equiv \lim_{a \rightarrow 0} 2ma$ これは二次元の二重湧き出し.

- 角 (角度 π/n で与えられる) をまわる流れ

$$f = Az^n = Ar^n e^{in\theta}, \quad A > 0, n > 0 \quad (6.11)$$

流れのポテンシャルと流線関数は

$$\begin{aligned} \phi &= Ar^n \cos n\theta \\ \psi &= -Ar^n \sin n\theta \end{aligned}$$

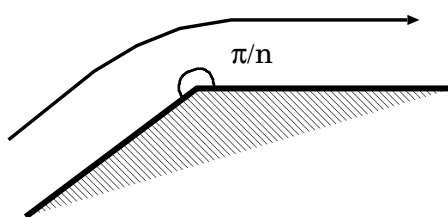
図 6.11: 角をまわる流れ. $n > 1$ の場合

$\psi = 0$ となるのは $\theta = \pi/n$. つまり, 原点から出る放射線.

角度が π より大きい, つまり, $0 < n < 1$ のとき (角を曲がる流れ) は

$$|v| = \left| \frac{df}{dz} \right| = |nAz^{n-1}| \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 0$$

である. $r = 0$ 近傍では物理的に変. つまり渦無し非発散ではありえない.

図 6.12: 角をまわる流れ. $0 < n < 1$ の場合

- 渦糸
湧き出しの流れのポテンシャルで m の代わりに純虚数を使う.

$$f = -i\kappa \ln z \quad (6.12)$$

レポートにおいて考察せよ.

6.4.3 円柱のまわりの流れ

これも, 2次元渦無し・非圧縮流体の簡単な例である.

- 静止流体中を運動する円柱のまわりの流れ (次の問題の答えを座標変換すると同じ結果が得られる.)

半径 a の円柱が x 軸の正の方向に U なる速さで動いているとする.

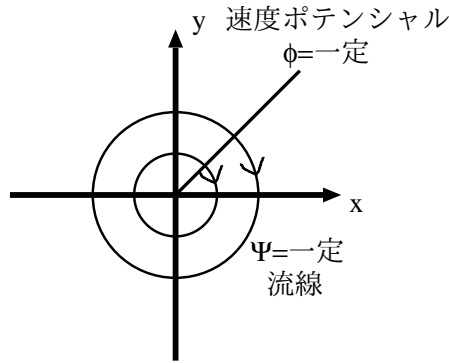


図 6.13: 渦糸の速度ポテンシャルと流線

円柱によって引き起こされる流れは複素速度ポテンシャル $f(z)$ で与えられる. $f(z)$ は円柱の外部いたるところで正則であるから

$$f = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots,$$

$$c_n = a_n + ib_n$$

のようにローラン級数に展開される. $z^n (n > 0)$ の項は全て 0 になる. なぜなら, 無限遠で速度が無限大になってしまうからである. $z = re^{i\theta}$ とおくと,

$$\frac{c_n}{z^n} = (a_n + ib_n)r^{-n}e^{-in\theta} = (a_n + ib_n)r^{-n}(\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

$$= (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^{-n} + i(b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta)r^{-n}$$

となるので, 上記のローラン級数を実数部と虚数部に分けると

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^{-n},$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) r^{-n}.$$

境界条件としては, 円柱表面 $r = a$ で円柱と流体との相対速度の法線成分が 0 になることが要求される. 円柱の速さは U であるから

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \cos \theta \quad \text{at } r = a.$$

⁴複素関数 $f(z)$ が 2 つの同心円に挟まれた環状領域 $0 \leq \rho < |z - a| < R$ で正則であれば, $f(z)$ は次のような級数で展開でき, 展開係数は一通りに定まる.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - a)^n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}}{(z - a)^m} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - a)^k,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz \quad (\rho < r < R)$$

これを $z = a$ を中心とする $f(z)$ の Laurent 展開という.

Φ の展開式を境界条件の式に代入すると

$$-\sum_{n=0}^{\infty} na^{-n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) = U \cos \theta.$$

左辺は $U \cos \theta$ のフーリエ展開に相当する. $\sin n\theta, \cos n\theta$ の係数を比較すると a_0, b_0 は任意で

$$\begin{aligned} -a^{-2}a_1 &= U, \\ b_1 &= 0, \\ a_n = b_n &= 0 \quad (n > 1). \end{aligned}$$

それゆえ, $f(z)$ は

$$f = C_0 - U \frac{a^2}{z} = C_0 - U \frac{a^2 e^{-i\theta}}{r} \quad (6.13)$$

となる.

複素速度ポテンシャルは微分だけが重要なので, 定数の差があっても流れは同じものとなる.

この場合の複素ポテンシャル

$$f = C_0 - U \frac{a^2}{z} = C_0 - U \frac{a^2 e^{-i\theta}}{r}$$

が, 境界条件を満たすことだけを確認するためには,

$$\begin{aligned} \phi &= C_0 - U \frac{a^2 \cos \theta}{r} \\ \psi &= -U \frac{a^2 \sin \theta}{r} \end{aligned}$$

から

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \frac{a^2 \cos \theta}{r^2}$$

において, $r = a$ において $v_r = U \cos \theta$ となることを確認すれば良い.

以上から, 円柱の運動によって引き起こされる流れは円柱の中心に二重わきだしを置いたときの流れと同等である.

- 速度 U の一様流中に静止する円柱のまわりの流れ (円柱のまわりの循環が 0 の場合)
 x 軸の正方向に速度 U の一様流があるとき, その中に半径 a の円柱を静止させたとする.

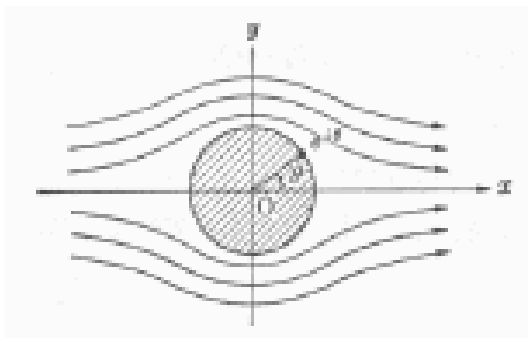


図 6.14: 円のまわりの一様流.

一様流に対して円柱は x 軸の負の方向に U なる速度で動くことになるから, 上の結果を用いて複素速度ポテンシャルは

$$f = \underbrace{Uz}_{\text{一様流}} + \underbrace{U\frac{a^2}{z}}_{\text{2重わきだし}}$$

となる.

この f が境界条件 (円柱表面で $v_r = 0$) を満たしていることを確認したければ以下のようにする. ポテンシャルたちは

$$f = \phi - i\psi \quad (6.14)$$

なので,

$$f = Uz + U\frac{a^2}{z} = Ure^{i\theta} + Ua^2r^{-1}e^{-i\theta} = Ur(\cos\theta + i\sin\theta) + Ua^2r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

より

$$\begin{aligned} \phi &= Ur \cos \theta + U \frac{a^2 \cos \theta}{r}, \\ \psi &= -Ur \sin \theta + U \frac{a^2 \sin \theta}{r} \end{aligned}$$

となる. これから, 速度は

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta - U \frac{a^2 \cos \theta}{r^2}, \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta - U \frac{a^2 \sin \theta}{r^2} \end{aligned}$$

円柱の表面 $r = a$ を考えると, $\psi = 0$ になる. 速度は次のようになる.

$$v_r = U \cos \theta - U \frac{a^2 \cos \theta}{r^2} = 0,$$

$$v_\theta = -U \sin \theta - U \frac{a^2 \sin \theta}{r^2} = -2U \sin \theta$$

$\theta = \pi/2$ で速度は 2 倍の $2U$.

- 循環 ($-\Gamma'$) を伴う場合

速度 U の一様流中に静止する円柱のまわりの流れの複素ポテンシャルは

$$f = Uz + U \frac{a^2}{z} + i \frac{\Gamma'}{2\pi} \ln z \quad [\text{m}^2 \text{sec}^{-1}, \text{m}^2 \text{sec}^{-1}]$$

これは, 循環無しの場合の円柱の周りの流れに渦糸の流れを重ね合わせたもの. よって, $\Gamma' > 0$ の場合, 流れは上半平面では循環の無い場合に比べて加速され, 下半平面では減速される.

f の表式より,

$$\phi = Ur \cos \theta + U \frac{a^2}{r} \cos \theta - \frac{\Gamma'}{2\pi} \theta,$$

$$\psi = -Ur \sin \theta + U \frac{a^2}{r} \sin \theta - \frac{\Gamma'}{2\pi} \ln r$$

よって

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta - U \frac{a^2}{r^2} \cos \theta,$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta - U \frac{a^2}{r^2} \sin \theta - \frac{\Gamma'}{2\pi r}$$

淀み点の位置を求める. 複素速度は

$$\frac{df}{dz} = U - U \frac{a^2}{z^2} + i \frac{\Gamma'}{2\pi z}$$

淀み点は

$$0 = |v| = \left| \frac{df}{dz} \right| = \left| U - U \frac{a^2}{z^2} + i \frac{\Gamma'}{2\pi z} \right|$$

すなわち

$$Uz^2 + i \frac{\Gamma'}{2\pi} z - Ua^2 = 0$$

よって

$$z = -i \frac{\Gamma'}{4\pi U} \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{\Gamma'}{4\pi U}\right)^2}$$

$\Gamma' \leq 4\pi U$ の時は $|z| = a$ で 淀み点は円柱上, $\Gamma' > 4\pi U$ の時は淀み点は円柱からはなれる.

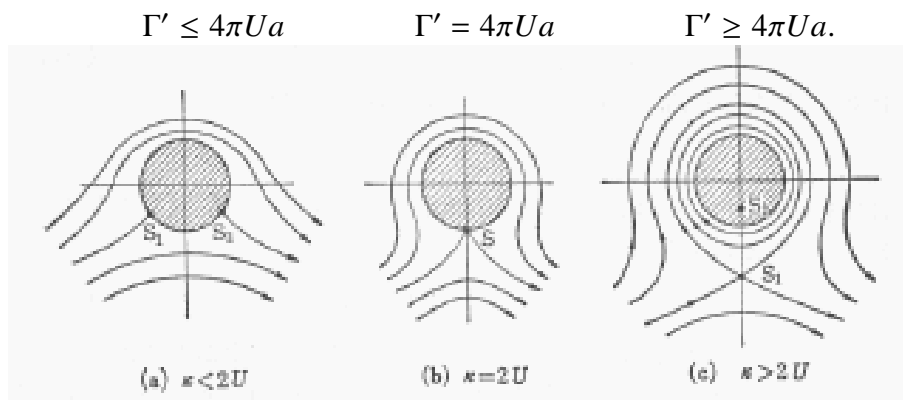


図 6.15: 円のまわりの一様流の Γ' 依存性. (a) $\Gamma' \leq 4\pi Ua$, (b) $\Gamma' = 4\pi Ua$, (c) $\Gamma' \geq 4\pi Ua$.

- 円柱に働く力

円柱表面上によどみ点が存在する場合には, 以下のように円柱に働く力を求めることができる.

円柱表面上における速度分布は

$$v_\theta|_{r=a} = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma'}{2\pi a}.$$

ベルヌーイの定理からよどみ圧と円柱上の任意の点における $p + \rho/2v^2$ は等しい. よって, 表面圧力分布は, p_0 をよどみ圧として,

$$\begin{aligned}
 \underbrace{p_0}_{\text{よどみ点}} &= \underbrace{p + \frac{\rho_0}{2} v_\theta^2}_{\text{円柱上の点}} \\
 p &= p_0 - \frac{\rho_0}{2} v_\theta^2 \\
 &= p_0 - \frac{\rho_0 U^2}{2} \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma'}{2\pi a U} \right)^2 \quad [\text{N m}^{-2}] = [\text{kg m}^{-1} \text{sec}^{-2}]
 \end{aligned}$$

となる. 単位長さあたりに円柱に働く力は以下ようになる (円柱全体に働く力を求めるには面積分をしないとけない).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= - \int p \mathbf{n} dl \\
 F_x &= - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta \\
 &= - \int_0^{2\pi} \cos \theta \left[p_0 - \frac{\rho_0 U^2}{2} \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma'}{2\pi a U} \right)^2 \right] a d\theta \\
 &= - \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[p_0 \sin \theta - \frac{\rho_0 U^2}{12} \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma'}{2\pi a U} \right)^3 \right] a d\theta \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
 F_y &= - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta \\
 &= - \int_0^{2\pi} \sin \theta \left[p_0 - \frac{\rho_0 U^2}{2} \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma'}{2\pi a U} \right)^2 \right] a d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 U^2}{2} 2 \frac{\Gamma'}{\pi a U} (\sin \theta)^2 a d\theta \\
 &= \rho_0 U \Gamma' \quad [\text{kg sec}^{-2}] = [\text{N m}^{-1}]
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

となる⁵.

一般に, 流れが物体に及ぼす力の流れの方向の成分を抵抗 (あるいは抗力, drag) という. 流れに直角方向の成分を揚力 (lift) という. 円柱の場合, 抵抗は 0, 揚力は $\rho U \Gamma$ となることが示された. 実はこれらの結果は任意の 2 次元的な物体について成り立つことが証明できる. 前者をダランベールのパラドックス (d'Alembert's paradox), 後者を Kutta-Joukowski の定理という.

- 粘性のない流体で物体を等速直線運動させると抵抗が働かない
- 自在物体の場合, 粘性が抵抗の原因となる.

6.5 3次元渦無し流れの例: 球のまわりの流れ

2次元の渦無しの流れを取り扱う場合に複素関数論という有力な道具があるのに対して, 3次元の場合にはそういう便利なものはない. それゆえ, ラプラス方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ をなんとかして解くというより他に手は無い.

3次元の渦無し (ポテンシャル流) の例として球のまわりの流れを考える.

⁵ F_y の式で $\sin^3 \theta$ の積分は 0 になる. グラフの概形を考えれば明らか.

6.5.1 静止流体中を動く球

速度ポテンシャル ϕ のラプラス方程式

$$\nabla^2 \phi = 0$$

の解は, 極座標では一般に

$$\phi = \sum (A_n r^n + B_n r^{-n-1})(C_n P_n(\cos \theta) + D_n Q_n(\cos \theta))$$

と展開される. ここで, $P_n(x)$, $Q_n(x)$ はそれぞれ Legendre の多項式 (または第一種の帯球関数), 第二種の帯球関数と呼ばれるものであり,

$$P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \times \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \cdots \right\},$$

$$Q_n(x) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \times \left\{ \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} \frac{1}{x^{n+3}} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} \frac{1}{x^{n+5}} + \cdots \right\}$$

となる.

静止流体中を速度 U で運動する半径 a の球に対しては, 境界条件は

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta$$

であるので

$$\phi = -\frac{Ua^3}{2r^2} \cos \theta \quad (6.17)$$

二重湧き出しによる流れである.

6.5.2 一様流中に静止する球

- 速度ポテンシャル ϕ は

$$\phi = U \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta \quad (6.18)$$

となる. 速度は

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta,$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta$$

となる (後で使うのは流線関数). なぜなら, 静止流体中を動く球の周りの流れを U で動く座標系に座標変換すれば良いだけだからである. この解が境界条件を満たすことを確認する: $r = a$ では

$$\begin{aligned}v_r &= 0, \\v_\theta &= -\frac{3U}{2} \sin \theta\end{aligned}$$

- 抵抗力は働かない.