2.4 運動方程式 · 運動量保存則

2.4.1 運動方程式の導出

流体とともに運動する領域 D' を考える. 領域 D' に働く力は

- 領域 D' を囲む閉曲面 $\partial D'$ に働く応力
- 保存力

である. これらの力と流体に働く慣性力がつりあわなければならない. 直交座標系をとり, D' についてオイラーの第一運動法則の i 成分 $(i = 1, 2, 3)$ を書き下すと,

$$\frac{d}{dt}\int_{D'} \rho v_i dV = \int_{\partial D'} \sigma_{ik} n'_k dS' + \int_{D'} \rho\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) dV \tag{2.29}$$

である. ベクトル形式で書くと

$$\frac{d}{dt}\int_{D'} \rho \boldsymbol{v} dV = \int_{\partial D'} \boldsymbol{\sigma_n} dS' + \int_{D'} \rho\left(-\mathrm{grad}\Phi\right) dV$$

ただし n'_k は閉曲面 $\partial D'$ の外向き単位法線ベクトルである. σ_{ik} は応力テンソルである. 応力テンソル σ_{ik} の各成分は, k 方向に垂直な面（単位面積）に働く, 応力の i 成分を表す. 右辺第 1 項は応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma_n} = \sigma_{ij} n_j \boldsymbol{e}_i$ の面積分である. Φ は保存力のポテンシャルエネルギー である.
この式を以下を用いて変形する.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{D'} \rho v_i dV}_{(2.14)\text{ より}\int_{D'} \rho \frac{dv_i}{dt} dV} = \underbrace{\int_{\partial D'} \sigma_{ik} n'_k dS'}_{Gauss\text{ の定理から}\int_{D'} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV} + \int_{D'} \rho\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) dV \tag{2.30}$$

これり以下の式が得られる.

$$\int_{D'} \left\{\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right\} dV = 0.$$

領域 D' が任意にとれることから, 以下の**流体の運動方程式**が得られる.

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \tag{2.31}$$

$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik}$ を使うと

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \tag{2.32}$$

これは運動方程式の移流形式になっている.

2.4.2 運動方程式の流束形式

質量保存則を用いて, 運動方程式の流束形式の微分項を書き換えると

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}+\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)-v_i\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k v_i)-v_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k v_i)-v_i\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k)\right\}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k v_i)
\end{aligned}
$$

これから, 以下のように運動量保存則が得られる.

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j-\sigma_{ij})=-\rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \tag{2.33}
$$

これは運動量保存則を表す形式になっている.
$\Pi_{ik}=\rho v_i v_k-\sigma_{ik}$ を運動量流束密度テンソルという. $\Pi_{ik}=\rho v_i v_k-\sigma_{ik}$ は, 単位時間に k 方向に垂直な面（単位面積）を通り, 単位時間に流れる運動量の i 成分を表す.

2.5 エネルギー保存則

2.5.1 エネルギー保存則の導出

流体とともに運動する領域 D' を考える. 領域内の流体になされる仕事と流体が受け取る熱は

- 領域を囲む閉曲面 $\partial D'$ に働く応力がする仕事
- 保存力のする仕事
- 閉曲面を通して流れ込む熱

である. 熱力学第 1 法則（エネルギー保存則）によれば, 加えられた仕事と熱が流体の運動エネルギーと内部エネルギーの増加に等しい. したがって D' についてのエネルギーの式は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{D'}\rho\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon\right)dV &= \int_{\partial D'}\sigma_{ik}v_i n'_k dS-\int_{D'}\rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}v_i dV\\
&\quad -\int_{\partial D'}q_i n'_i dS+\int_{D'}Q dV
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

ε は単位質量当りの流体の内部エネルギー, q_i は閉曲面を通して流れ込む熱流束である. Q は内部熱源.
熱流束として考えるものはおもに次の 2 つである.

- 熱伝導 による熱流束 $\boldsymbol{q}^T$

  流体中に温度勾配が存在するとき, それを解消する方向に熱流束が生じる.

  特に熱伝導による熱流束は, 考える流体中の温度勾配が十分小さいとき, $q_i^T = -\kappa_{ij}\dfrac{\partial T}{\partial x_j}$ と表わされる. ここで, κ_{ij} は熱伝導率を表すテンソルである.

- 放射による熱流束 $\boldsymbol{q}^{rad}$

(2.14)

$$\frac{d}{dt}\int_{D'}\rho A dV = \int_{D'}\rho\frac{dA}{dt}dV$$

を用いて時間微分と積分を交換し, Gauss の定理を用いて変型すると

$$\int_{D'}\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon\right)dV = \int_{D'}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}v_i)dV - \int_{D'}\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}v_i dV - \int_{D'}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}dV + \int_{D'}QdV.$$

領域 D' が任意にとれることから

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}v_i) - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}v_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + Q. \tag{2.35}$$

全エネルギーの形にするため, ポテンシャルエネルギーの項 (右辺第 2 項) を次のように変型する.

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}v_i = \rho\frac{d\Phi}{dt} - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{2.36}$$

右辺と左辺の項を組み替えると

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon+\Phi\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\sigma_{ik}v_i+q_k\right) = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + Q. \tag{2.37}$$

応力テンソルで, 圧力を用いた表現 $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$ を使うと,

$$\rho\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon+\Phi\right)}_{e_{tot}\text{とおく}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(pv_k - \sigma'_{ik}v_i + q_k\right) = \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + Q. \tag{2.38}$$

2.5.2　エネルギー保存式の流束形式

質量保存則を用いて変形すると, 以下が得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho e_{tot})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k e_{tot} - v_i\sigma_{ik} + q_k) &= \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + Q,\\
\frac{\partial(\rho e_{tot})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k e_{tot} + pv_k - v_i\sigma'_{ik} + q_k) &= \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + Q,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

これは粘性流体のエネルギー保存則を表す形式になっている. ただし,

$$e_{tot} \equiv \left(\frac{1}{2}v_i^2 + \varepsilon + \Phi\right).$$

e_{tot} は, 単位質量当りの流体のもつ全エネルギーである. ρe_{tot} は, 単位体積当りの流体のもつ全エネルギーである. $F_k = \rho e_{tot} v_k - v_i \sigma_{ik} + q_k$ をエネルギー流束密度ベクトルという.

2.5.3 流体の方程式 (ここまでのまとめ)

ここまで導出したのは連続の式 (質量保存則), 運動方程式 (運動量保存則), エネルギー保存則である.
流体の運動場, 熱力学状態を決定するためには, 上記に加えて以下の 2 つの方程式が必要となる. いずれも流体の「種類」を指定するものである.

- 構成方程式 (constitution equation): 応力と連続体を記述する座標 (変形) および熱力学量などと関係づける法則.
- 状態方程式 (equation of state): 熱力学量 (p, T, ρ) の間の関係式. 例えば, 理想気体の場合は $p = nkT$

更に, 境界条件と初期条件が必要である.

2.6 境界条件

境界で与えるべき情報は, 質量フラックス, 運動量フラックス, エネルギーフラックスである. しかし普通, 境界条件としては, 境界におけるフラックスを直接与えるのではなく, 物理的意味付けのはっきりした変数, 例えば, 圧力, 速度の境界における値を与えることが多い. その場合, 与えられた条件が境界における各フラックスの値を決めているかどうかは, 問題に応じて考察, 確認しなければならない[3].

2.6.1 境界条件の例: 固体境界

- 静止した固体表面における条件

  質量保存則より, 固体表面を通しての質量流束は 0 であるから,

  $$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{at surface.} \tag{2.40}$$

  $\boldsymbol{n}$ は固体表面の法線ベクトルである.

  粘性流体の場合は, これだけでは条件が不足して解くことができないので, 境界条件を付け加える必要がある. 固体表面では流体は密着していると考えて（粘着条件）

  $$\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{at surface.} \tag{2.41}$$

[3] 実践的には, 1 次の差分スキームをつくって検討するとよい.

- 動いている物体の表面における条件

  境界を通しての質量フラックスが 0 であるから, 境界面の法線方向の速度成分が一致する. すなわち,

  $$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}^{(s)}\cdot\boldsymbol{n} \qquad \text{at surface.} \tag{2.42}$$

  ただし $\boldsymbol{v}^{(s)}$ は物体の表面速度である.

  粘性流体の場合の対応する粘着条件は, 流体の速度と物体表面の速度が一致することである.

  $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(s)} \qquad \text{at surface.} \tag{2.43}$$

境界条件のもとになる考え方は, 流体粒子と壁の相互作用が流体粒子同士の相互作用と同じである, ということである.
さらにこの他に, 熱に関する境界条件が必要である. これは, 問題設定により異なるので, ここでは述べない[2].

2.7　基礎方程式から得られる諸々の式

2.7.1　力学的エネルギーの時間変化の式

運動方程式

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - \rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

に $\dfrac{v_i}{\rho}$ をかけて i について和をとる.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right) + v_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right) = -\frac{1}{\rho}v_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}v_i\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} - v_i\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

これが運動エネルギーの式である. 運動エネルギーの式の流束形式は以下のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{v_k\left(\frac{1}{2}\rho v_i^2\right) - v_i\sigma_{ik}\right\} = -\rho\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}v_i - \sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{2.44}$$

運動エネルギーの式の両辺に $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ を加えると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi\right] + v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(v_i p)}{\partial x_i} + \frac{p}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(v_i\sigma'_{ik})}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

となる. よって, 以下のように**力学的エネルギーの式**が得られる.

$$\rho\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}v_i^2 + \Phi\right] = \frac{\partial}{\partial x_k}(-v_k p + v_i\sigma'_{ik}) + p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{2.45}$$

[2]例えばよく用いられるのは, 断熱条件 $q_k = 0.$ at surface である. あるいは, Benard 問題のように, T を fix にすることである.

力学的エネルギーの式の流束形式は以下の通りである．

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left\{\frac{1}{2}v_i^2+\Phi\right\}\right]+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho v_k\left\{\frac{1}{2}v_i^2+\Phi\right\}+pv_k-v_i\sigma'_{ik}\right]=p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}-\sigma'_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{2.46}$$

2.7.2　内部エネルギーの時間変化の式

全エネルギーの式

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_i^2+\varepsilon+\Phi\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(pv_k-\sigma'_{ik}v_i+q_k\right)=\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+Q.$$

から, 力学的エネルギーの式

$$\rho\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}v_i^2+\Phi\right]=\frac{\partial}{\partial x_k}(-v_kp+v_i\sigma'_{ik})+p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

を差し引く．

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{\partial q_k}{\partial x_k}=-p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+Q.$$

左辺と右辺を多少組み替えると

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt}=-p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial q_k}{\partial x_k}+Q.$$

内部エネルギーの式の流束形式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varepsilon v_i)=-p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\frac{\partial q_k}{\partial x_k}+Q.$$

ベクトル形式で書けば,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\mathrm{div}(\rho\varepsilon\boldsymbol{v})=-p\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}+\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\mathrm{div}\boldsymbol{q}+Q. \tag{2.47}$$

内部エネルギーの式の各項の意味は以下の通りである．

- 右辺第 1 項: $-p\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}$

  流体要素が周辺の流体からされる仕事を表す. 熱力学で良く知られている第一法則

  $$dU=-pdV+d'Q$$

  の右辺第 1 項に相当する．

- 右辺第 2 項以降: $\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\cdots$

  流体要素に与えられる熱を表す. 熱力学で良く知られている第一法則

  $$dU=-pdV+d'Q$$

  の右辺第 2 項に相当する．

2.7.3 エンタルピーの時間変化の式

単位質量あたりのエンタルピーを h とする．熱力学関係式 $h = \varepsilon + \dfrac{p}{\rho}$ を用いると内部エネルギーの式の左辺は次のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho\varepsilon\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(h - \frac{p}{\rho}\right)\right\} + \mathrm{div}\left\{\rho\left(h - \frac{p}{\rho}\right)\boldsymbol{v}\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) - \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho h\boldsymbol{v}) - \mathrm{div}(p\boldsymbol{v}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \mathrm{div}(\rho h\boldsymbol{v}) - \frac{dp}{dt} - p\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

よってエンタルピーの式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \mathrm{div}(\rho h\boldsymbol{v}) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \mathrm{div}\boldsymbol{q} + \frac{dp}{dt} + Q. \tag{2.48}$$

2.7.4 エントロピーの時間変化の式

単位質量あたりのエントロピーを s とする．熱力学関係式 $d\varepsilon = Tds + \dfrac{p}{\rho^2}d\rho$ と質量保存則を用いて内部エネルギーの式の左辺を変型すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho\varepsilon\boldsymbol{v}) &= \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)\varepsilon \\ &= \rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)s + \frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)\rho \\ &= \rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)s - p\mathrm{div}\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

よってエントロピーの式は

$$\rho T\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)s = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \mathrm{div}\boldsymbol{q} + Q. \tag{2.49}$$

この式は熱輸送の式とも呼ばれる．左辺 $\rho T\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\right)s$ は単位時間に単位体積の流体が受け取った熱, 右辺第 1 項 $\sigma'_{ik}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}$ は粘性散逸により発生した熱, 右辺第 2 項は熱流の収束発散である．