FTPACK 使用の手引 (version 1.0)

石岡 圭一 (2000/09/19)

1　概要

これは, 高速フーリエ変換を行なうサブルーチンパッケージである. データアクセスをできるだけ連続的にすることにより, ベクトル計算機上での高速化をはかっているが, 通常の計算機上で使用しても十分高速である (ただし, 通常の計算機の CPU およびキャッシュの性質を十分考慮して最適化された FFT ルーチン, 例えば FFTW (`http://www.fftw.org/`) にはさすがにかなわないので, そのような計算機で FFT を実行する必要があり, かつ実行時間の削減が重要である場合には, そのような最適化された FFT ルーチンの使用を薦める). なお, 変換の基底は 2,3,4,5 であるので, これらの素因数の積で表されるデータ長の変換に限られる.

以下のサブルーチン群の中で初期化をおこなうサブルーチン (サブルーチン名が `I` で終わる) は, そのサブルーチン群に属する変換ルーチンを用いる際, かならず最初に 1 回呼ばなければならない. ただしそれ以後は, 異なるデータ数を指定するときに限って初期化ルーチンを呼べばよい. なお, 初期化ルーチンが用いる作業領域は, 同じサブルーチン群に属する変換ルーチンを用いている間変更してはならない. (この作業領域には, 因数と三角関数表が格納されている).

また, ベクトル化の効率を上げるために, 同じ項数の時系列データを複数個同時にフーリエ変換する仕様になっている. つまり, 2 次元配列 `X(I,J),I=1,2,`$\cdots$`,M, J=1,2,`$\cdots$`,N` が与えられた場合, 各 `I` について, `X(I,1),X(I,2),`$\cdots$`,X(I,N)` に対するフーリエ変換を行なう. すなわち, この場合 `N` 項のフーリエ変換を `M` 回繰り返すことになる. 時系列データが 1 種類だけの場合は `M=1` とすればよい.

2　サブルーチンのリスト

離散型原始複素フーリエ変換

`FTTZLI(N,IT,T)`	初期化をおこなう.
`FTTZLM(M,N,X,Y,IT,T)`	変換をおこなう.

離散型複素フーリエ変換

`FTTZUI(N,IT,T)`	初期化をおこなう.
`FTTZUF(M,N,X,Y,IT,T)`	正変換をおこなう.
`FTTZUB(M,N,X,Y,IT,T)`	逆変換をおこなう.

離散型実フーリエ変換

`FTTRUI(N,IT,T)`	初期化をおこなう.
`FTTRUF(M,N,X,Y,IT,T)`	正変換をおこなう.
`FTTRUB(M,N,X,Y,IT,T)`	逆変換をおこなう.

離散型 cosine 変換 (台形公式)

`FTTCTI(N,IT,T)`	初期化をおこなう.
`FTTCTF(M,N,X,Y,IT,T)`	正変換をおこなう.
`FTTCTB(M,N,X,Y,IT,T)`	逆変換をおこなう.

離散型 sine 変換 (台形公式)

`FTTSTI(N,IT,T)`	初期化をおこなう.
`FTTSTF(M,N,X,Y,IT,T)`	正変換をおこなう.
`FTTSTB(M,N,X,Y,IT,T)`	逆変換をおこなう.

離散型 cosine 変換 (中点公式)

`FTTCMI(N,IT,T)`	初期化をおこなう.
`FTTCMF(M,N,X,Y,IT,T)`	正変換をおこなう.
`FTTCMB(M,N,X,Y,IT,T)`	逆変換をおこなう.

離散型 sine 変換 (中点公式)

`FTTSMI(N,IT,T)`	初期化をおこなう.
`FTTSMF(M,N,X,Y,IT,T)`	正変換をおこなう.
`FTTSMB(M,N,X,Y,IT,T)`	逆変換をおこなう.

3　サブルーチンの説明

3.1　FTTZLI/FTTZLM

1. 機能

   1 次元 (項数 N) の複素時系列データ $\{\alpha_k\}$ が M 個与えられたとき, 離散型原始複素フーリエ変換を FFT により行なう. ただし, N は $N = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること. `FTTZLI` は初期化を行う; `FTTZLM` はフーリエ変換を行う.

2. 定義

   - 原始複素フーリエ変換

     $\{\alpha_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \exp(2\pi i \frac{jk}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

3. 呼び出し方法

```
FTTZLI(N,IT,T)
FTTZLM(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数 M
N	(I)	入力. 変換の項数 N
X	(D)	入力. $\{\alpha_k\}$ 出力. $\{x_j\}$ 大きさ M×N×2 の 3 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N×2 の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ N×2 の 1 次元配列

5. データの格納方法

   `X(M,0:N-1,2)` と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,0,1)	X(I,0,2)	X(I,1,1)	X(I,1,2)	$\cdots$	X(I,N-1,1)	X(I,N-1,2)
$\mathrm{Re}(x_0)$	$\mathrm{Im}(x_0)$	$\mathrm{Re}(x_1)$	$\mathrm{Im}(x_1)$	$\cdots$	$\mathrm{Re}(x_{N-1})$	$\mathrm{Im}(x_{N-1})$
$\mathrm{Re}(\alpha_0)$	$\mathrm{Im}(\alpha_0)$	$\mathrm{Re}(\alpha_1)$	$\mathrm{Im}(\alpha_1)$	$\cdots$	$\mathrm{Re}(\alpha_{N-1})$	$\mathrm{Im}(\alpha_{N-1})$

3.2 FTTZUI/FTTZUF/FTTZUB

1. 機能

   1 次元 (項数 N) の複素時系列データ $\{x_j\}$ または $\{\alpha_k\}$ が M 個与えられたとき, 離散型複素フーリエ正変換, またはその逆変換を FFT により行う. ただし, N は $N = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること. `FTTZUI` は初期化を行う; `FTTZUF` はフーリエ正変換を行う; `FTTZUB` はフーリエ逆変換を行う.

2. 定義

   - フーリエ正変換

     $\{x_j\}$ を入力し、次の変換を行ない、$\{\alpha_k\}$ を求める.

     $$\alpha_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_j \exp(-2\pi i \frac{jk}{N}), \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

   - フーリエ逆変換

     $\{\alpha_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

     $$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \exp(2\pi i \frac{jk}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

3. 呼び出し方法

```
FTTZUI(N,IT,T)
FTTZUF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTZUB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

`M`	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数 M
`N`	(I)	入力. 変換の項数 N
`X`	(D)	入力. $\{x_j\}$ または $\{\alpha_k\}$ 出力. $\{\alpha_k\}$ または $\{x_j\}$ 大きさ M×N×2 の 3 次元配列
`Y`	(D)	作業領域. 大きさ M×N×2 の 1 次元配列
`IT`	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
`T`	(D)	作業領域. 大きさ N×2 の 1 次元配列

5. データの格納方法

   `X(M,0:N-1,2)` と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

`X(I,0,1)`	`X(I,0,2)`	`X(I,1,1)`	`X(I,1,2)`	$\cdots$	`X(I,N-1,1)`	`X(I,N-1,2)`
$\mathrm{Re}(x_0)$	$\mathrm{Im}(x_0)$	$\mathrm{Re}(x_1)$	$\mathrm{Im}(x_1)$	$\cdots$	$\mathrm{Re}(x_{N-1})$	$\mathrm{Im}(x_{N-1})$
$\mathrm{Re}(\alpha_0)$	$\mathrm{Im}(\alpha_0)$	$\mathrm{Re}(\alpha_1)$	$\mathrm{Im}(\alpha_1)$	$\cdots$	$\mathrm{Re}(\alpha_{N-1})$	$\mathrm{Im}(\alpha_{N-1})$

3.3 FTTRUI/FTTRUF/FTTRUB

1. 機能

   1 次元 (項数 N) の実時系列データ $\{x_j\}$ が M 個与えられたとき, 離散型実フーリエ正変換, またはその逆変換を FFT により行う. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること. `FTTRUI` は初期化を行う; `FTTRUF` はフーリエ正変換を行う; `FTTRUB` はフーリエ逆変換を行う.

2. 定義

   - フーリエ正変換

     $\{x_j\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{a_k\},\{b_k\}$ を求める.

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_j \cos\frac{2\pi jk}{N}, \quad k = 0, 1, \cdots, N/2$$

$$b_k = -\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_j \sin\frac{2\pi jk}{N}, \quad k = 1, 2, \cdots, N/2-1$$

   - フーリエ逆変換

     $\{a_k\},\{b_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

$$x_j = a_0 + a_{N/2}(-1)^j + 2\sum_{k=1}^{N/2-1}(a_k \cos\frac{2\pi jk}{N} - b_k \sin\frac{2\pi jk}{N}) \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

3. 呼び出し方法

```
FTTRUI(N,IT,T)
FTTRUF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTRUB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数 M
N	(I)	入力. 変換の項数 N
X	(D)	入力. $\{x_j\}$ または $\{a_k\},\{b_k\}$ 出力. $\{a_k\},\{b_k\}$ または $\{x_j\}$ 大きさ M×N の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ N×2 の 1 次元配列

5. データの格納方法

   X(M,0:N-1) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,0)	X(I,1)	X(I,2)	X(I,3)	$\cdots$	X(I,N-2)	X(I,N-1)
x_0	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{N-2}	x_{N-1}
a_0	$a_{N/2}$	a_1	b_1	$\cdots$	$a_{N/2-1}$	$b_{N/2-1}$

3.4 FTTCTI/FTTCTF/FTTCTB

1. 機能

   周期 2π の偶関数 $x(t)$ の半周期を N 等分した $N+1$ 個の標本 $\{x_j\}$,

   $$x_j = x(\frac{\pi j}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N$$

   が M 個与えられたとき, 台形公式による離散型 cosine 変換, またはその逆変換を FFT により行なう. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること.

2. 定義

   - cosine 正変換 (台形公式)

     $\{x_j\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{a_k\}$ を求める.

     $$a_k = \frac{2}{N}\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_N(-1)^k + \sum_{j=1}^{N-1} x_j \cos\frac{\pi jk}{N}\right) \quad (k = 0, 1, \cdots, N)$$

   - cosine 逆変換 (台形公式)(正変換と定数倍異なるだけ)

     $\{a_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

     $$x_j = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_N(-1)^j + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos\frac{\pi jk}{N} \quad (j = 0, 1, \cdots, N)$$

3. 呼び出し方法

```
FTTCTI(N,IT,T)
FTTCTF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTCTB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数
N	(I)	入力. 変換の項数 - 1 (N)
X	(D)	入力. $\{x_j\}$ または $\{a_k\}$ 出力. $\{a_k\}$ または $\{x_j\}$ 大きさ M×(N+1) の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ 3N の 1 次元配列

5. データの格納方法

   X(M,0:N) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,0)	X(I,1)	···	X(I,N-1)	X(I,N)
x_0	x_1	$\cdots$	x_{N-1}	x_N
a_0	a_1	$\cdots$	a_{N-1}	a_N

6. 備考

   - 配列 X と Y との大きさが異なることに注意.

3.5 FTTSTI/FTTSTF/FTTSTB

1. 機能

   周期 2π の奇関数 $x(t)$ の半周期を N 等分した $N-1$ 個の標本 $\{x_j\}$,

   $$x_j = x(\frac{\pi j}{N}), \quad j = 1, 2, \cdots, N-1$$

   が M 個与えられたとき, 台形公式による離散型 sine 変換, またはその逆変換を FFT により行なう. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること.

2. 定義

   - sine 変換 (台形公式)

     $\{x_j\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{b_k\}$ を求める.

     $$b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} x_j \sin \frac{\pi jk}{N} \quad (k = 1, 2, \cdots, N-1)$$

   - sine 逆変換 (台形公式)(正変換と定数倍異なるだけ)

     $\{b_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_j\}$ を求める.

     $$x_j = \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin \frac{\pi jk}{N} \quad (j = 1, 2, \cdots, N-1)$$

3. 呼び出し方法

```
FTTSTI(N,IT,T)
FTTSTF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTSTB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数
N	(I)	入力. 変換の項数 (N)
X	(D)	入力. $\{x_j\}$ または $\{b_k\}$ 出力. $\{b_k\}$ または $\{x_j\}$ 大きさ M×N の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ 5N/2 の 1 次元配列

5. データの格納方法

   X(M,N) と宣言されている場合, 各 I について以下のようにデータが格納される.

X(I,1)	X(I,2)	$\cdots$	X(I,N-1)	X(I,N)
x_1	x_2	$\cdots$	x_{N-1}	$x_N = 0$
b_1	b_2	$\cdots$	b_{N-1}	$b_N = 0$

6. 備考

- 配列 `X` の 2 次元目の大きさは, 変換データそのものを格納するよりのに必要な `N-1` より 1 つだけ大きく `N` ととらなければならないことに注意が必要である (この部分は作業領域として使われる).

3.6 FTTCMI/FTTCMF/FTTCMB

1. 機能

   周期 2π の偶関数 $x(t)$ の半周期を N 等分した N 個の標本 $\{x_{j+1/2}\}$,

   $$x_{j+1/2} = x(\frac{\pi(j+1/2)}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

   が M 個与えられたとき, 中点公式による離散型 cosine 変換, またはその逆変換を FFT により行なう. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること.

2. 定義

   - cosine 正変換 (中点公式)

     $\{x_{j+1/2}\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{a_k\}$ を求める.

     $$a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{j+1/2} \cos \frac{\pi(j+1/2)k}{N} \quad (k = 0, 1, \cdots, N-1)$$

   - cosine 逆変換 (中点公式)

     $\{a_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_{j+1/2}\}$ を求める.

     $$x_{j+1/2} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos \frac{\pi(j+1/2)k}{N} \quad (j = 0, 1, \cdots, N-1)$$

3. 呼び出し方法

```
FTTCMI(N,IT,T)
FTTCMF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTCMB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数
N	(I)	入力. 変換の項数 (N)
X	(D)	入力. $\{x_{j+1/2}\}$ または $\{a_k\}$ 出力. $\{a_k\}$ または $\{x_{j+1/2}\}$ 大きさ M×N の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ 6N の 1 次元配列

5. データの格納方法

`X(M,0:N-1)` と宣言されている場合, 各 `I` について以下のようにデータが格納される.

X(I,0)	X(I,1)	$\cdots$	X(I,N-2)	X(I,N-1)
$x_{1/2}$	$x_{3/2}$	$\cdots$	$x_{N-3/2}$	$x_{N-1/2}$
a_0	a_1	$\cdots$	a_{N-2}	a_{N-1}

3.7 FTTSMI/FTTSMF/FTTSMB

1. 機能

周期 2π の奇関数 $x(t)$ の半周期を N 等分した N 個の標本 $\{x_{j+1/2}\}$,

$$x_{j+1/2} = x(\frac{\pi(j+1/2)}{N}), \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

が M 個与えられたとき, 中点公式による離散型 sine 変換, またはその逆変換を FFT により行なう. ただし, N は偶数で, かつ $N/2 = 2^a 3^b 5^c (a, b, c : 0$ または自然数) であること.

2. 定義

- sine 正変換 (中点公式)

  $\{x_{j+1/2}\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{b_k\}$ を求める.

$$b_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x_{j+1/2} \sin\frac{\pi(j+1/2)k}{N} \quad (k = 1, 2, \cdots, N)$$

- sine 逆変換 (中点公式)

  $\{b_k\}$ を入力し, 次の変換を行ない, $\{x_{j+1/2}\}$ を求める.

$$x_{j+1/2} = \frac{1}{2}b_N(-1)^j + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin\frac{\pi(j+1/2)k}{N} \quad (j = 0, 1, \cdots, N-1)$$

3. 呼び出し方法

```
FTTSMI(N,IT,T)
FTTSMF(M,N,X,Y,IT,T)
FTTSMB(M,N,X,Y,IT,T)
```

4. パラメーターの説明

M	(I)	入力. 同時に変換する時系列の個数
N	(I)	入力. 変換の項数 (N)
X	(D)	入力. $\{x_{j+1/2}\}$ または $\{b_k\}$ 出力. $\{b_k\}$ または $\{x_{j+1/2}\}$ 大きさ M×N の 2 次元配列
Y	(D)	作業領域. 大きさ M×N の 1 次元配列
IT	(I)	作業領域. 大きさ 5 の 1 次元配列
T	(D)	作業領域. 大きさ 6N の 1 次元配列

5. データの格納方法

`X(M,N)` と宣言されている場合, 各 `I` について以下のようにデータが格納される.

`X(I,1)`	`X(I,2)`	$\cdots$	`X(I,N-1)`	`X(I,N)`
$x_{1/2}$	$x_{3/2}$	$\cdots$	$x_{N-3/2}$	$x_{N-1/2}$
b_1	b_2	$\cdots$	b_{N-1}	b_N