C2PACK 使用の手引 (version 0.0)

石岡 圭一 (2000/09/28)

1　概要

これは, いわゆるチャネル型の境界条件 (x 方向は周期境界条件, y 方向は剛体壁境界条件) を持つ 2 次元流体方程式を解くための, スペクトル変換を行なうサブルーチンパッケージであり, スペクトル展開の係数から格子点値, およびその逆の変換を行なうサブルーチン, また, 数値モデルに用いるヤコビアンの計算を行うサブルーチンなどからなっている. また, このパッケージは FTPACK の上位パッケージであり, これらのパッケージを内部で引用している.

切断波数 K, L のスペクトル逆変換は, 以下のように表せる:

y 方向が sin 級数で表される場合:

$$g(x,y) = \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=1}^{L} s_{kl} e^{ikx} \sin(ly). \tag{1}$$

y 方向が cos 級数で表される場合:

$$g(x,y) = \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=0}^{L} c_{kl} e^{ikx} \cos(ly). \tag{2}$$

$g(x,y), h(x,y)$ が実数であるとすると, s_{kl}, c_{kl} は以下の関係を満たしている必要がある:

$$s_{(-k)l} = s_{kl}^{*} \tag{3}$$

$$c_{(-k)l} = c_{kl}^{*} \tag{4}$$

ここに, $\{\}^*$ は複素共役を表す.

また, スペクトル正変換は以下のように表せる:

y 方向が sin 級数で表される場合:

$$s_{kl} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(x,y)e^{-ikx}\sin(ly)dxdy \quad (k=-K,\ldots,K;\ l=1,\ldots,L), \tag{5}$$

y 方向が cos 級数で表される場合:

$$c_{kl} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(x,y)e^{-ikx}\cos(ly)dxdy \quad (k=-K,\ldots,K;\ l=1,\ldots,L), \tag{6}$$

$$c_{k0} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(x,y)e^{-ikx}dxdy \quad (k=-K,\ldots,K), \tag{7}$$

数値計算においては, 上記の積分はそれぞれ離散近似される. フーリエ正変換の部分は等間隔格子点上での値を用いた離散フーリエ正変換 (FTPACK マニュアルを参照) によって近似される. ある条件のもとでは, この近似は完全な近似, すなわちもとの積分と同じ値を与える.

本ライブラリは, スペクトルデータ $(s_{kl}, c_{kl}) \rightarrow$ 等間隔格子点上のグリッドデータ (台形格子上: $g(x_i, y_j)$; 中点格子上: $g(x_i, y_{j+1/2})$) の逆変換を行うルーチン群, 等間隔格子点上のグリッドデータ (台形格子上: $g(x_i, y_j)$; 中点格子上: $g(x_i, y_{j+1/2})$) $\rightarrow$ スペクトルデータ (s_{kl}, c_{kl}) の正変換を行うルーチン群, そして, その他の補助ルーチンおよびヤコビアンの計算等の応用ルーチン群よりなっている.

ここに, x_i は $[0, 2\pi]$ を I-分割した格子点の x 座標であり, $x_i = (2\pi/I)i \quad (i = 0, 1, \cdots, I-1)$ である. y_j は $[0, \pi]$ を J-分割した格子点の y 座標であり, $y_j = (2\pi/J)j \quad (j = 0, 1, \cdots, J)$ である. また, $y_{j+1/2}$ は上記の y_j と y_{j+1} の中点であり, $y_{j+1/2} = (2\pi/J)(j+1/2) \quad (j = 0, 1, \cdots, J-1)$ である.

以下のサブルーチンの説明において,

`KM`:	x 方向の切断波数 K
`LM`:	y 方向の切断波数 L
`IM`:	x 方向の格子点数 I
`JM`:	y 方向の格子点数 J

なる対応関係がある. ここに, `KM,LM,IM,JM` には以下のような制約がある.

- FFT を使うために, `IM` および `JM` は 2,3,5 で素因数分解される正の整数でなければならない. さらに, `IM` は偶数でなければならない (これは, 実 FFT を使うためである).
- `JM` および `IM` はそれぞれ, `JM` $>$ `LM` および `IM` $>$ `2*KM` を満していなければならない.
- ヤコビアンの計算 (`C2AJBS`) で aliasing を除くためには, `JM` $>$ `3*LM/2` および `IM` $>$ `3*KM` としなければならない.

`C2PACK` において, スペクトルデータ (s_{kl}, c_{kl}) は上に述べた制限をもとに, 独立な $(2K+1)L, (2K+1)(L+1)$ 個の成分を以下のように配列 `S(-KM:KM,1:LM)` または `S(-KM:KM,0:LM)` に格納して扱う.

以下 $k =$ `K` > 0, $l =$ `L` ≥ 0 として,

`S( K,L)`:	s_{kl} の実部	`S( K,L)`:	c_{kl} の実部
`S(-K,L)`:	s_{kl} の虚部	`S(-K,L)`:	c_{kl} の虚部
`S( 0,L)`:	s_{0l}(実数)	`S( 0,L)`:	c_{0l}(実数)

と格納されている.

2 サブルーチンのリスト

C2INIT	初期化
C2S2GA	スペクトルデータからグリッドデータへの変換
C2S2GT	グリッドデータの転置をとる (C2S2GA 用)
C2G2SA	グリッドデータからスペクトルデータへの変換
C2G2ST	グリッドデータの転置をとる (C2G2SA 用)
C2AJCB	ヤコビアンの計算
C2AJC2	ヤコビアンの計算 (2 つの変数について)
C2AJBS	非発散流体方程式の非線形項の計算
C2AJB2	非発散流体方程式の非線形項と移流項の計算
C2SWNL	浅水方程式の時間微分項の計算
C2SWNN	浅水方程式の時間微分項の計算 (非線形項のみ)
C2SWCK	浅水方程式の保存量の計算
C2SWBL	浅水方程式の簡単な初期値化

3 サブルーチンの説明

3.1 C2INIT

1. 機能 C2PACK の初期化ルーチン. C2PACK の他のサブルーチンを使用する前に必ず一度呼ばねばならない.

2. 定義

3. 呼び出し方法

   C2INIT(JM,IM,ITJ,TJ,ITI,TI)

4. パラメーターの説明

JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
ITJ	(I(5))	出力. C2PACK の他のルーチンで用いられる配列
TJ	(D(JM*6))	出力. C2PACK の他のルーチンで用いられる配列
ITI	(I(5))	出力. C2PACK の他のルーチンで用いられる配列
TI	(D(JM*2))	出力. C2PACK の他のルーチンで用いられる配列

5. 備考

   (a) C2PACK を使用している間, 配列 ITJ,TJ,ITI,TI の内容を変更してはならない.

3.2 C2S2GA

1. 機能

   スペクトルデータからグリッドデータへの変換を行う.

2. 定義

   スペクトル逆変換 (概要を参照) により, スペクトルデータ (s_{kl} または c_{kl}) から台形格子上または中点格子点上のグリッドデータ ($g(x_i, y_j)$ または $g(x_i, y_{j+1/2})$) を求める.

3. 呼び出し方法

   `C2S2GA(LM,KM,JM,IM,S,G,W,ITJ,TJ,ITI,TI,ISW)`

4. パラメーターの説明

LM	(I)	入力. y 方向の切断波数
KM	(I)	入力. x 方向の切断波数
JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
S	(D((2*KM+1)*LM)) または (D((2*KM+1)*(LM+1)))	入力. s_{kl} または c_{kl} が格納されている配列 (備考参照)
G	(D((JM+1)*IM))	出力. $g(x_i, y_j)$ または $g(x_i, y_{j+1/2})$ が格納される配列 (備考参照)
W	(D((JM+1)*IM))	作業領域
ITJ	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TJ	(D(JM*6))	入力. C2INIT で与えられる配列
ITI	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TI	(D(IM*2))	入力. C2INIT で与えられる配列
ISW	(I)	入力. 変換の種類を決めるフラグ (備考参照)

5. 備考

   (a) ISW の値と変換の種類:

ISW=1:	sine 台形公式	S(-KM:KM,LM) には s_{kl} を格納
ISW=2:	cosine 台形公式	S(-KM:KM,0:LM) には c_{kl} を格納
ISW=3:	sine 中点公式	S(-KM:KM,LM) には s_{kl} を格納
ISW=4:	cosine 中点公式	S(-KM:KM,0:LM) には c_{kl} を格納

   (b) 出力の順番: G(0:JM,0:IM-1) と宣言されている場合, G(J,I) には J を j として
   台形公式の場合 (ISW=1,2) は, $g(x_i, y_j)$ $(j = 0, \ldots, J)$ が,
   中点公式の場合 (ISW=3,4) は, $g(x_i, y_{j+1/2})$ $(j = 0, \ldots, J-1)$ が格納される.
   なお, 中点公式の場合, 余分の G(JM,I) には 0 が代入される. また, 台形公式 sine 変換の場合 (ISW=1) は, 定義式どおり G(0,I),G(JM,I) には 0 が代入される.

   (c) 出力 G(J,I) の次元の順番が y 方向, x 方向の順であることに注意すること. これは余分な並べ替えにかかるコストを減らすためである. もし G(I,J) のような順番の出力が必要なら, 後述のサブルーチン C2S2GT を併せて用いて,

   ```
   CALL C2S2GA(LM,KM,JM,IM,S,W,G,ITJ,TJ,ITI,TI,ISW)
   CALL C2S2GT(JM,IM,W,G)
   ```

   のようにすればよい (G と W の大きさは同じであるので).

3.3 C2S2GT

1. 機能 グリッドデータの転置をとる (C2S2GA 用)

2. 定義

3. 呼び出し方法

   `C2S2GT(JM,IM,G,GG)`

4. パラメーターの説明

JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
G	(D((JM*1)*IM)	入力. 備考参照
GG	(D((JM*1)*IM)	出力. 備考参照

5. 備考

   (a) G(0:JM,0:IM-1), GG(0:IM-1,0:JM) と宣言されている場合, GG(I,J) には G(J,I) が代入される.

3.4 C2G2SA

1. 機能

   グリッドデータからスペクトルデータへの変換を行う.

2. 定義

   スペクトル正変換 (概要を参照) により, 台形格子上または中点格子点上のグリッドデータ ($g(x_i, y_j)$ または $g(x_i, y_{j+1/2})$) からスペクトルデータ (s_{kl} または c_{kl}) を求める.

3. 呼び出し方法

   `C2G2SA(LM,KM,JM,IM,G,S,W,ITJ,TJ,ITI,TI,ISW)`

4. パラメーターの説明

LM	(I)	入力. y 方向の切断波数
KM	(I)	入力. x 方向の切断波数
JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
G	(D((JM+1)*IM))	入力. $g(x_i, y_j)$ または $g(x_i, y_{j+1/2})$ が格納されている配列 (備考参照)
S	(D((2*KM+1)*LM)) または (D((2*KM+1)*(LM+1)))	出力. s_{kl} または c_{kl} が格納される配列 (備考参照)
W	(D((JM+1)*IM))	作業領域
ITJ	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TJ	(D(JM*6))	入力. C2INIT で与えられる配列
ITI	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TI	(D(IM*2))	入力. C2INIT で与えられる配列
ISW	(I)	入力. 変換の種類を決めるフラグ (備考参照)

5. 備考

   (a) 入力 G は作業領域としても使われるので値が保持されないことに注意.

(b) ISW の値と変換の種類:

ISW=1:	sine 台形公式	S(-KM:KM,LM) には s_{kl} が格納される
ISW=2:	cosine 台形公式	S(-KM:KM,0:LM) には c_{kl} が格納される
ISW=3:	sine 中点公式	S(-KM:KM,LM) には s_{kl} が格納される
ISW=4:	cosine 中点公式	S(-KM:KM,0:LM) には c_{kl} が格納される

(c) 入力の順番: G(0:JM,0:IM-1) と宣言されている場合, G(J,I) には J を j として
台形公式の場合 (ISW=1,2) は, $g(x_i, y_j)$ $(j = 0, \dots, J)$ を,
中点公式の場合 (ISW=3,4) は, $g(x_i, y_{j+1/2})$ $(j = 0, \dots, J-1)$ を格納しておくこと.
なお, 中点公式の場合の余分の G(JM,I) および, 台形公式 sine 変換の場合 (ISW=1) の G(0,I),G(JM,I) は参照されないので何が格納されていてもよい.

(d) 入力 G(J,I) の次元の順番が y 方向, x 方向の順であることに注意すること. これは余分な並べ替えにかかるコストを減らすためである. もし G(I,J) のような順番の入力が必要なら, 後述のサブルーチン C2G2ST を併せて用いて,

```
CALL C2G2ST(JM,IM,G,W)
CALL C2G2SA(LM,KM,JM,IM,W,S,G,ITJ,TJ,ITI,TI,ISW)
```

のようにすればよい (G と W の大きさは同じであるので).
また, もし入力 G の値を保持したい場合は, G と同じ大きさの作業領域 WW を別に用意しておいて,

```
CALL C2G2ST(JM,IM,G,W) CALL C2G2SA(LM,KM,JM,IM,W,S,WW,ITJ,TJ,ITI,TI,ISW)
```

のようにすればよい.

3.5 C2G2ST

1. 機能 グリッドデータの転置をとる (C2G2SA 用)

2. 定義

3. 呼び出し方法

   C2G2ST(JM,IM,GG,G)

4. パラメーターの説明

JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
GG	(D((JM*1)*IM)	入力. 備考参照
G	(D((JM*1)*IM)	出力. 備考参照

5. 備考

(a) GG(0:IM-1,0:JM), G(0:JM,0:IM-1) と宣言されている場合, G(J,I) には GG(I,J) が代入される.

3.6 C2AJCB

1. 機能

   ヤコビアンの計算を行う.

2. 定義

   sine 級数展開された 2 つの関数 $A(x,y), B(x,y)$:

$$A(x,y) = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=1}^{L} a_{kl} e^{ikx} \sin(ly),$$

$$B(x,y) = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=1}^{L} b_{kl} e^{ikx} \sin(ly),$$

   に対して, そのヤコビアン $C(x,y)$:

$$C(x,y) \equiv \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}$$

   を考える. 本サブルーチンは上記の展開係数 a_{kl}, b_{kl} を入力として, C の切断波数 K, L までのスペクトル展開係数 c_{kl}

$$c_{kl} \equiv \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} C(x,y) e^{-ikx} \sin(ly) dx dy. \qquad (8)$$

   を求めるものである.

3. 呼び出し方法

   `C2AJCB(LM,KM,JM,IM,SA,SB,SC,WS,WG,ITJ,TJ,ITI,TI)`

4. パラメーターの説明

LM	(I)	入力. y 方向の切断波数
KM	(I)	入力. x 方向の切断波数
JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
SA	(D((2*KM+1)*LM))	入力. a_{kl} が格納されている配列
SB	(D((2*KM+1)*LM))	入力. b_{kl} が格納されている配列
SC	(D((2*KM+1)*LM))	出力. c_{kl} が格納される配列
WS	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	作業領域
WG	(D((JM+1)*IM*3))	作業領域
ITJ	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TJ	(D(JM*6))	入力. C2INIT で与えられる配列
ITI	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TI	(D(IM*2))	入力. C2INIT で与えられる配列

5. 備考

   (a) aliasing を除くために十分な `JM`, `IM` の大きさについては, 概要を参照.

3.7 C2AJC2

1. 機能

   ヤコビアンの計算を行う (2 つの変数について).

2. 定義

   sine 級数展開された 2 つの関数 $A(x,y), B1(x,y), B2(x,y)$:

$$A(x,y) = \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=1}^{L} a_{kl}e^{ikx}\sin(ly),$$

$$B1(x,y) = \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=1}^{L} b1_{kl}e^{ikx}\sin(ly),$$

$$B2(x,y) = \sum_{k=-K}^{K}\sum_{l=1}^{L} b2_{kl}e^{ikx}\sin(ly),$$

   に対して, そのヤコビアン $C_1(x,y), C_2(x,y)$:

$$C1(x,y) \equiv \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B1}{\partial y} - \frac{\partial B1}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}$$

$$C2(x,y) \equiv \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B2}{\partial y} - \frac{\partial B2}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}$$

   を考える. 本サブルーチンは上記の展開係数 $a_{kl}, b1_{kl}, b2_{kl}$ を入力として, C の切断波数 K, L までのスペクトル展開係数 $c1_{kl}, c2_{kl}$

$$c1_{kl} \equiv \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} C1(x,y)e^{-ikx}\sin(ly)dxdy.$$

$$c2_{kl} \equiv \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} C2(x,y)e^{-ikx}\sin(ly)dxdy.$$

   を求めるものである. 2 つの変数についての計算を同時に行うことによって, `C2AJCB` を 2 度呼出すより 2 割高速になる.

3. 呼び出し方法

   `C2AJC2(LM,KM,JM,IM,SA,SB1,SB2,SC1,SC2,WS,WG,ITJ,TJ,ITI,TI)`

4. パラメーターの説明

`LM`	`(I)`	入力. y 方向の切断波数
`KM`	`(I)`	入力. x 方向の切断波数
`JM`	`(I)`	入力. y 方向の格子点数
`IM`	`(I)`	入力. x 方向の格子点数
`SA`	`(D((2*KM+1)*LM))`	入力. a_{kl} が格納されている配列
`SB1`	`(D((2*KM+1)*LM))`	入力. $b1_{kl}$ が格納されている配列
`SB2`	`(D((2*KM+1)*LM))`	入力. $b2_{kl}$ が格納されている配列
`SC1`	`(D((2*KM+1)*LM))`	出力. $c1_{kl}$ が格納される配列
`SC2`	`(D((2*KM+1)*LM))`	出力. $c2_{kl}$ が格納される配列
`WS`	`(D((2*KM+1)*(LM+1)))`	作業領域
`WG`	`(D((JM+1)*IM*4))`	作業領域
`ITJ`	`(I(5))`	入力. C2INIT で与えられる配列
`TJ`	`(D(JM*6))`	入力. C2INIT で与えられる配列
`ITI`	`(I(5))`	入力. C2INIT で与えられる配列
`TI`	`(D(IM*2))`	入力. C2INIT で与えられる配列

5. 備考

   (a) 作業領域 `WG` の大きさが `C2AJCB` より大きいことに注意.

   (b) aliasing を除くために十分な `JM`, `IM` の大きさについては, 概要を参照.

3.8 C2AJBS

1. 機能

   非発散流体方程式の非線形項の計算を行う.

2. 定義

   2 次元非発散流体に対する渦度方程式は以下のように書ける.

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\left(r\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\zeta)}{\partial y}\right) \equiv \mathcal{N}(\zeta).$$

   ここに, 粘性項等は省略した. u, v は x, y 方向の流速で, ζ から以下のように求められる.

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = r\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \psi = \left(r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{-1}\zeta.$$

   また, r は x 方向と y 方向のスケーリングの際のスケーリングパラメターの違いによって現れるアスペクト比であり, 特にスケーリングパラメターの非等方性が無ければ $r = 1$ である.

   本サブルーチンは上記の ζ に対応する展開係数 ζ_{kl} (sine 級数展開されているとする) を入力として, $\mathcal{N}(\zeta)$ の切断波数 K, L までのスペクトル展開係数 $\mathcal{N}_{kl}$

$$\mathcal{N}_{kl} \equiv \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{N}(\zeta)e^{-ikx}\sin(ly)dxdy. \tag{9}$$

   を求めるものである.

$\mathcal{N}(\zeta)$ の表式として, 上述のものをそのまま用いると, 必要なスペクトル変換は, ζ, u, v を求めるためのスペクトル逆変換 (合計 3 回) および $u\zeta, v\zeta$ に対するスペクトル正変換 (合計 2 回) の合計 5 回である. しかし, 本サブルーチンは, $\mathcal{N}(\zeta)$ の表式を以下のように変形することによって, 必要な変換回数を 4 回にしている.

さて,

$$\zeta = r\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad r\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\zeta) &= -r\frac{\partial}{\partial x}\left\{u\left(r\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{v\left(r\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} \\
&= -r\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial(uv)}{\partial x} - rv\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial(u^2/2)}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(r\frac{\partial(v^2/2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= -r\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial(uv)}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial(u^2/2)}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(r\frac{\partial(v^2/2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} - ru\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= -r\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2/2)}{\partial y} - \frac{\partial(u^2/2)}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(r\frac{\partial(v^2/2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} - r\frac{\partial(u^2/2)}{\partial x}\right) \\
&= -r^2\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} - r\frac{\partial^2(v^2/2)}{\partial x\partial y} + r\frac{\partial^2(u^2/2)}{\partial x\partial y} - r\frac{\partial^2(v^2/2)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} + r\frac{\partial(u^2/2)}{\partial x\partial y} \\
&= -\left(r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(uv) - r\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(v^2 - u^2),
\end{aligned}$$

と変形できるから, $\mathcal{N}_{kl}$ を求めるために必要な変換回数は, u, v を求めるためのスペクトル逆変換 (合計 2 回) および $uv, v^2 - u^2$ に対するスペクトル正変換 (合計 2 回) の合計 4 回となる.

3. 呼び出し方法

`C2AJBS(LM,KM,JM,IM,R,Z,DZ,WS,WG,ITJ,TJ,ITI,TI)`

4. パラメーターの説明

LM	(I)	入力. y 方向の切断波数
KM	(I)	入力. x 方向の切断波数
JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
R	(D)	入力. アスペクト比 r の値
Z	(D((2*KM+1)*LM))	入力. ζ_{kl} が格納されている配列
DZ	(D((2*KM+1)*LM))	出力. $\mathcal{N}_{kl}$ が格納される配列
WS	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	作業領域
WG	(D((JM+1)*IM*3))	作業領域
ITJ	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TJ	(D(JM*6))	入力. C2INIT で与えられる配列
ITI	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TI	(D(IM*2))	入力. C2INIT で与えられる配列

5. 備考

(a) aliasing を除くために十分な JM, IM の大きさについては, 概要を参照.

3.9 C2AJB2

1. 機能

   非発散流体方程式の非線形項と移流項の計算を行う.

2. 定義

   2 次元非発散流体に対する渦度方程式とパッシブスカラーの移流方程式は以下のように書ける.

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\left(r\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\zeta)}{\partial y}\right) \equiv \mathcal{N}.$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -\left(r\frac{\partial(u\eta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\eta)}{\partial y}\right) \equiv \mathcal{F}.$$

   ここに, 粘性項等は省略した. u, v は x, y 方向の流速で, ζ から以下のように求められる.

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = r\frac{\partial\psi}{\partial x}; \quad \psi = \left(r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{-1}\zeta.$$

   また, r は x 方向と y 方向のスケーリングの際のスケーリングパラメターの違いによって現れるアスペクト比であり, 特にスケーリングパラメターの非等方性が無ければ $r = 1$ である.

   本サブルーチンは上記の ζ に対応する展開係数 ζ_{kl} (sine 級数展開されているとする) を入力として, $\mathcal{N}$ と $\mathcal{F}$ の切断波数 K, L までのスペクトル展開係数 $\mathcal{N}_{kl}$,$\mathcal{F}_{kl}$

$$\mathcal{N}_{kl} \equiv \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{N}e^{-ikx}\sin(ly)dxdy.$$

$$\mathcal{F}_{kl} \equiv \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}e^{-ikx}\sin(ly)dxdy.$$

   を求めるものである. 変換をまとめて行うことにより, `C2AJC2` を使う場合 (変換 8 回) および `C2AJBS` と `C2AJCB` 合わせて用いる (変換 9 回) よりも高速である (変換 7 回で済む).

3. 呼び出し方法

   `C2AJB2(LM,KM,JM,IM,R,Z,S,DZ,DS,WS,WG,ITJ,TJ,ITI,TI)`

4. パラメターの説明

LM	(I)	入力. y 方向の切断波数
KM	(I)	入力. x 方向の切断波数
JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
R	(D)	入力. アスペクト比 r の値
Z	(D((2*KM+1)*LM))	入力. ζ_{kl} が格納されている配列
DZ	(D((2*KM+1)*LM))	出力. $\mathcal{N}_{kl}$ が格納される配列
S	(D((2*KM+1)*LM))	入力. η_{kl} が格納されている配列
DS	(D((2*KM+1)*LM))	出力. $\mathcal{F}_{kl}$ が格納される配列
WS	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	作業領域
WG	(D((JM+1)*IM*4))	作業領域
ITJ	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TJ	(D(JM*6))	入力. C2INIT で与えられる配列
ITI	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TI	(D(IM*2))	入力. C2INIT で与えられる配列

5. 備考

   (a) aliasing を除くために十分な `JM`, `IM` の大きさについては, 概要を参照.

3.10 C2SWNL

1. 機能

   浅水方程式の時間微分項の計算を行う.

2. 定義

   平面上の浅水方程式系は, 無次元化すると以下のように表せる:

$$\dot{\zeta} \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -r\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(v\zeta)}{\partial y}, \tag{10}$$

$$\dot{D} \equiv \frac{\partial D}{\partial t} = r\frac{\partial(v\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(u\zeta)}{\partial y} - \left(r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(E+\Phi), \tag{11}$$

$$\dot{\Phi} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -r\frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} - \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y}. \tag{12}$$

   ここに, ζ,D はそれぞれ渦度, 発散で,Φ はジオポテンシャルであり,

$$\zeta \equiv r\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{13}$$

$$D \equiv r\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{14}$$

   と定義される. また, $E = (u^2+v^2)/2$ である. また, r は x 方向と y 方向のスケーリングの際のスケーリングパラメターの違いによって現れるアスペクト比であり, 特にスケーリングパラメターの非等方性が無ければ $r = 1$ である.

本サブルーチンは, 上記の ζ, D, Φ のスペクトル展開係数 $\zeta_{kl}, D_{kl}, \Phi_{kl}$ を入力として, $\dot{\zeta}, \dot{D}, \dot{\Phi}$ の切断波数 K, L までまでのスペクトル展開係数 $\dot{\zeta}_{kl}, \dot{D}_{kl}, \dot{\Phi}_{kl}$ を求めるものである. ただし, スリップチャネル境界条件に合わせて, y 方向は ζ は sin 級数展開, D, Φ は cos 級数展開されているものとする.

3. 呼び出し方法

   `C2SWNL(LM,KM,JM,IM,R,AVT,DIV,PHI,DAVT,DDIV,DPHI,WS,WG,ITJ,TJ,ITI,TI)`

4. パラメーターの説明

LM	(I)	入力. y 方向の切断波数
KM	(I)	入力. x 方向の切断波数
JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
R	(D)	入力. アスペクト比 r の値
AVT	(D((2*KM+1)*LM))	入力. ζ_{kl} が格納されている配列
DIV	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	入力. D_{kl} が格納されている配列
PHI	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	入力. Φ_{kl} が格納されている配列
DAVT	(D((2*KM+1)*LM)	出力. $\dot{\zeta}_{kl}$ が格納される配列
DDIV	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	出力. $\dot{D}_{kl}$ が格納される配列
DPHI	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	出力. $\dot{\Phi}_{kl}$ が格納される配列
WS	(D((2*KM+1)*(LM+1))	作業領域
WG	(D((JM+1)*IM*4))	作業領域
ITJ	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TJ	(D(JM*6))	入力. C2INIT で与えられる配列
ITI	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TI	(D(IM*2))	入力. C2INIT で与えられる配列

5. 備考

   (a) aliasing を除くために十分な `JM`, `IM` の大きさについては, 概要を参照.

3.11 C2SWNN

1. 機能

   浅水方程式の時間微分項の計算を行う (非線形項のみ).

2. 定義

   `C2SWNL` の定義で掲げた平面上の浅水方程式系において, ジオポテンシャル Φ を平均部分 $\bar{\Phi}$(定数) とそれからのずれ $\Phi'(x,y,t)$ に分けて $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$ と扱うことにすると,

$$\dot{\zeta} \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left[-r\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(v\zeta)}{\partial y} \right], \tag{15}$$

$$\dot{D} \equiv \frac{\partial D}{\partial t} = \left[r\frac{\partial(v\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(u\zeta)}{\partial y} - \left(r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E \right] - \left(r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi', \tag{16}$$

$$\dot{\Phi} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-r\frac{\partial(u\Phi')}{\partial x} - \frac{\partial(v\Phi')}{\partial y} \right] - \bar{\Phi}D. \qquad (17)$$

本サブルーチンは, 上記の ζ, D, Φ のスペクトル展開係数 $\zeta_{kl}, D_{kl}, \Phi_{kl}$ および $\bar{\Phi}$ を入力として, $\dot{\zeta}, \dot{D}, \dot{\Phi}$ の非線形部分 ([ ] で囲まれた部分) の切断波数 K, L までまでのスペクトル展開係数 ($[\dot{\zeta}_{kl}], [\dot{D}_{kl}], [\dot{\Phi}_{kl}]$ と書くことにする) を求めるものである. これは C2SWNL と異なり, 残りの線形項の影響部分 (重力波に対応) を別の方法 (線形重力波に対する厳密解を使うなど) で処理するためのものである.

3. 呼び出し方法

C2SWNN(LM,KM,JM,IM,R,BARPHI,AVT,DIV,PHI,DAVT,DDIV,DPHI,WS,WG, ITJ,TJ,ITI,TI)

4. パラメーターの説明

LM	(I)	入力. y 方向の切断波数
KM	(I)	入力. x 方向の切断波数
JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
R	(D)	入力. アスペクト比 r の値
BARPHI	(D)	入力. 平均ジオポテンシャル $\bar{\Phi}$ の値
AVT	(D((2*KM+1)*LM))	入力. ζ_{kl} が格納されている配列
DIV	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	入力. D_{kl} が格納されている配列
PHI	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	出力. Φ_{kl} が格納されてる配列
DAVT	(D((2*KM+1)*LM)	出力. $[\dot{\zeta}_{kl}]$ が格納される配列
DDIV	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	出力. $[\dot{D}_{kl}]$ が格納される配列
DPHI	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	出力. $[\dot{\Phi}_{kl}]$ が格納される配列
WS	(D((2*KM+1)*(LM+1))	作業領域
WG	(D((JM+1)*IM*4))	作業領域
ITJ	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TJ	(D(JM*6))	入力. C2INIT で与えられる配列
ITI	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TI	(D(IM*2))	入力. C2INIT で与えられる配列

5. 備考

(a) aliasing を除くために十分な JM, IM の大きさについては, 概要を参照.

3.12 C2SWCK

1. 機能

浅水方程式の保存量を計算する.

2. 定義

C2SWNL の項で導入した浅水方程式系には以下のような保存量がある:

- 全角運動量 (A.Mom.):

$$\text{A.Mom.} \equiv \langle \Phi u \rangle, \qquad (18)$$

- 全エネルギー (A.Ene.):

$$\text{A.Ene.} \equiv \left\langle \frac{1}{2}\Phi(u^2+v^2+\Phi) \right\rangle, \tag{19}$$

- 全エンストロフィー (A.Ens.):

$$\text{A.Ens.} \equiv \left\langle \frac{1}{2}\frac{\zeta^2}{\Phi} \right\rangle. \tag{20}$$

ここに, $\langle\ \rangle$ は全領域平均を表す記号で,

$$\langle A \rangle \equiv \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A dy dx, \tag{21}$$

である.

本サブルーチンは, ζ, D, Φ のスペクトル展開係数 $\zeta_{kl}, D_{kl}, \Phi_{kl}$ を入力として, 上記の保存量 A.Mom., A.Ene., A.Ens., を求めるものである.

3. 呼び出し方法

`C2SWCK(LM,KM,JM,IM,R,AVT,DIV,PHI,AENE,AENS,AMOM, WS,WG,ITJ,TJ,ITI,TI)`

4. パラメーターの説明

LM	(I)	入力. y 方向の切断波数
KM	(I)	入力. x 方向の切断波数
JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
R	(D)	入力. アスペクト比 r の値
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
AVT	(D((2*KM+1)*LM))	入力. ζ_{kl} が格納されている配列
DIV	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	入力. D_{kl} が格納されている配列
PHI	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	入力. Φ_{kl} が格納されている配列
AMOM	(D)	出力. A.Mom. の値
AENE	(D)	出力. A.Ene. の値
AENS	(D)	出力. A.Ens. の値
WS	(D((2*KM+1)*(LM+1))	作業領域
WG	(D((JM+1)*IM*4))	作業領域
ITJ	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TJ	(D(JM*6))	入力. C2INIT で与えられる配列
ITI	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TI	(D(IM*2))	入力. C2INIT で与えられる配列

5. 備考

(a) aliasing を除くために十分な JM, IM の大きさについては, 概要を参照.

(b) A.Mom., A.Ene., A.Ens. は非粘性の浅水方程式の保存量であるが, 離散化されている場合は, たとえ aliasing が除かれていても厳密には A.Mom. だけの保存性しか保証されないことに注意.

3.13 C2SWBL

1. 機能

   浅水方程式の簡単な初期値化を行う.

2. 定義

   C2SWNL の項で定義した平面上の浅水方程式系には重力波が含まれているので, ええ加減な初期値を与えてしまうと重力波成分が多すぎて望ましくない激しい時間変動が生じてしまう. 重力波は主に発散成分を伴っているため, 初期値として渦度成分だけ与えればいいように思われるが, それでもすぐに発散成分が発生してしまうので今一つである. 本サブルーチンは, 渦度成分が与えられた場合に, それに「バランス」するようなジオポテンシャル場を与えて重力波の発生をできるだけ抑えた初期値を作成するものである.

   C2SWNL の項で定義した平面上の浅水方程式系のうち, 発散場の時間変化を記述する方程式は,

   $$\dot{D} \equiv \frac{\partial D}{\partial t} = r\frac{\partial(v\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(u\zeta)}{\partial y} - \left(r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(E+\Phi). \tag{22}$$

   ここで, 発散成分の生成を抑えるために, $\dot{D} = 0$ とするには, ジオポテンシャル場を

   $$\left(r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi = r\frac{\partial(v\zeta)}{\partial x} - \frac{\partial(u\zeta)}{\partial y} - \left(r^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E \tag{23}$$

   として定めればよい (右辺は渦度場を与えれば定まるので). ただし, この式ではポテンシャル場の平均値 $\bar{\Phi}$ は定まらないので, 別途与えることになる.

   本サブルーチンは, ζ のスペクトル展開係数 ζ_{kl} を入力として, 上記のバランス式を満すような Φ の切断波数 K, L までまでのスペクトル展開係数 Φ_{kl} を求めるものである. ただし, スリップチャネル境界条件に合わせて, y 方向は ζ は sin 級数展開, Φ は cos 級数展開されているものとする.

3. 呼び出し方法

   `C2SWBL(LM,KM,JM,IM,R,BARPHI,AVT,PHI,WS,WG,ITJ,TJ,ITI,TI)`

4. パラメーターの説明

LM	(I)	入力. y 方向の切断波数
KM	(I)	入力. x 方向の切断波数
JM	(I)	入力. y 方向の格子点数
IM	(I)	入力. x 方向の格子点数
R	(D)	入力. アスペクト比 r の値
BARPHI	(D)	入力. $\bar{\Phi}$ の値
AVT	(D((2*KM+1)*LM))	入力. ζ_{kl} が格納されている配列
PHI	(D((2*KM+1)*(LM+1)))	入力. Φ_{kl} が格納されてる配列
WS	(D((2*KM+1)*(LM+1))	作業領域
WG	(D((JM+1)*IM*4))	作業領域
ITJ	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TJ	(D(JM*6))	入力. C2INIT で与えられる配列
ITI	(I(5))	入力. C2INIT で与えられる配列
TI	(D(IM*2))	入力. C2INIT で与えられる配列

5. 備考